

## KAJIAN AWAL PENERAPAN KONSEP MEKANIKA PADA GERAK ROBOT DENGAN ANALISIS ALJABAR

Luh Putu Budi Yasmini<sup>1</sup>, I Gede Aris Gunadi<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Jurusan Pendidikan Fisika, Fakultas MIPA, Universitas Pendidikan Ganesha  
Singaraja, Indonesia

e-mail: budi.yasmini2@yahoo.co.id, aria\_sukaat@yahoo.com

### Abstrak

Gerak *screw* adalah gerak dasar sebuah robot yang dapat dianalisis dengan menerapkan konsep gerak benda tegar. Gerak benda tegar terdiri dari gerak rotasi terhadap suatu garis lurus dan diikuti dengan gerak translasi pada garis lurus tersebut. Dalam penelitian ini dikaji kembali mengenai konsep dasar dari gerak robot dengan menggunakan koordinat eksponensial (koordinat *twist*), serta persamaan kecepatan gerak robot sebagai fungsi waktu dengan menggunakan analisis aljabar. Gerak robot dengan model *ball joints* digambarkan oleh dua persamaan kecepatan koordinat spatial dan *body*, yakni:  $\hat{V}_{ab}^s$  dan  $\hat{V}_{ab}^b$  yang menggambarkan kecepatan sistem sebagai fungsi sudut rotasi terhadap sumbu-x ( $\varphi$ ), sumbu-y ( $\beta$ ) dan sumbu-z ( $\alpha$ ) yang merupakan fungsi dari  $\theta$ .

**Kata kunci:** robot, *screw*, dan *twist*

### Abstract

*Screw* motion is the basic movement of a robot which can be analyzed by using rigid body concept. There are two kinds of rigid body movements, rotation and translation movements. In this research, the basic concepts of robot's movement are analyzed by using exponential coordinates (*twist* coordinates), and also found the formula of velocity as the function of time. Ball joints are taken to analyze in this research as the application. These joints are described by two velocity equations which are spatial and body coordinates,  $\hat{V}_{ab}^s$  and  $\hat{V}_{ab}^b$

**Keywords:** robot, *screw*, and *twist*

## PENDAHULUAN

Gerak benda tegar merupakan konsep yang paling mendasar dalam mempelajari gerak robot (kinematika dan dinamika), serta sistem pengendalian robot (Murray, 1994; Lee, 2010; Grassia, 1998; Nightingale, 2008). Secara umum, gerak benda tegar terdiri dari gerak rotasi terhadap suatu garis lurus dan diikuti dengan gerak translasi pada garis lurus tersebut. Gerak benda tegar pada umumnya disebut gerak sekrup (*screw motion*) dan *twist*. Terdapat banyak penelitian internasional mengenai keterkaitan konsep mekanika (gerak benda tegar) dengan konsep gerak robot dalam ranah teoretik. Duindam (2007), menyatakan bahwa untuk analisis, disain, dan kontrol mengenai robot ataupun sistem mekanik yang kompleks diperlukan model matematis untuk menggambarkan sistem geraknya. Nightingale (2008) menggunakan analisis geometri untuk menggambarkan sistem mekanik dengan mengasumsikan bahwa kerangka kerja pemodelan, analisis, dan kontrol sistem tersebut merupakan distribusi pada sebuah keragaman Riemannian (*Riemannian manifold*) dengan koneksi affine (*affine connections*). Sedangkan perkembangan robot di Indonesia baru mulai memasuki ranah disain dan kontrol, belum terdapat artikel berbahasa Indonesia mengenai analisis teoretik gerak robot sejauh penelusuran peneliti selama ini.

Berdasarkan hal tersebut di atas, dalam penelitian ini akan dikaji kembali mengenai konsep dasar dari gerak robot dengan menggunakan koordinat eksponensial (atau disebut koordinat *twist*) dalam gerak robot yang disebut gerak *screw*, serta persamaan kecepatan gerak robot sebagai fungsi waktu dengan

menggunakan analisis aljabar. Selanjutnya, peneliti mengaplikasikan persamaan tersebut untuk gerak robot sederhana (robot dengan *model ball joints*) dan mensimulasikan hasil yang diperoleh.

## METODE PENELITIAN

Penelitian yang dilakukan merupakan suatu telaah teoretis-matematis. Sebagai penelitian yang bersifat telaah teoretis-matematis, maka dilakukan tinjauan terhadap literatur mengenai prosedur-prosedur yang telah dikembangkan sebelumnya serta perhitungan matematis.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

*Ball joints* merupakan salah satu jenis *joints* yang ternyata banyak digunakan pada rangkaian kinematik robot maupun pada tubuh manusia. *Ball joints* merupakan *joints* dengan 3 DoF yang memungkinkan dapat melakukan rotasi pada segala arah. *Twist* yang terkait dengan *ball joints* didefinisikan sebagai:

$$\xi = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \times q \\ \omega \end{bmatrix},$$

Sumbu rotasi  $\omega$  tidak konstan, tetapi merupakan suatu parameter bebas. Tiga buah sudut rotasi terhadap tiga sumbu koordinat  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , dan  $\theta_3$  yang tidak diketahui digantikan dengan suatu variabel sumbu rotasi  $\theta\omega$ .

**Kasus:**  $\varphi \neq \beta \neq \alpha = f(\theta(t))$ , dan  $R_{ab} = R_x(\varphi)R_y(\beta)R_z(\alpha)$ ,

dengan  $\dot{R}_{ab} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} \dot{R}_{11} & \dot{R}_{12} & \dot{R}_{13} \\ \dot{R}_{21} & \dot{R}_{22} & \dot{R}_{23} \\ \dot{R}_{31} & \dot{R}_{32} & \dot{R}_{33} \end{bmatrix}$ , dimana komponen matrik  $\dot{R}_{ab}$  terdiri atas:

$$\dot{R}_{11} = -\sin \beta \cos \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \theta} - \cos \beta \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \theta};$$

$$\dot{R}_{21} = (-\sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \sin \beta \cos \alpha) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + (\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \beta \sin \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \sin \varphi \cos \beta \cos \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \theta};$$

$$\dot{R}_{31} = (\cos \varphi \sin \alpha + \sin \varphi \sin \beta \cos \alpha) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + (\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \beta \sin \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \cos \varphi \cos \beta \cos \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \theta};$$

$$\dot{R}_{12} = \sin \beta \sin \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \theta} - \cos \beta \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \theta};$$

$$\dot{R}_{22} = (-\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \beta \sin \alpha) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + (-\cos \varphi \sin \alpha - \sin \varphi \sin \beta \cos \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \sin \varphi \cos \beta \sin \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \theta};$$

$$\dot{R}_{32} = (\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \beta \sin \alpha) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + (-\sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \sin \beta \cos \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \cos \varphi \cos \beta \sin \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \theta};$$

$$\dot{R}_{13} = \cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial \theta};$$

$$\dot{R}_{23} = -\cos \varphi \cos \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \sin \varphi \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial \theta};$$

$$\dot{R}_{33} = -\sin \varphi \cos \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \cos \varphi \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial \theta};$$

Maka, diperoleh:

$$\hat{V}_{ab}^s = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varphi \cos \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial \theta} & -\sin \varphi \cos \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \cos \varphi \frac{\partial \beta}{\partial \theta} & 0 \\ \cos \varphi \cos \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial \theta} & 0 & -(1 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \sin \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}) & 0 \\ \sin \varphi \cos \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \cos \varphi \frac{\partial \beta}{\partial \theta} & 1 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \sin \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pers.(4.1)

atau persamaan (4.10) dapat pula dinyatakan berdasarkan persamaan (2.23) sebagai berikut:

$$V_{ab}^s = \begin{bmatrix} v_{ab}^s \\ \omega_{ab}^s \end{bmatrix},$$

pers.(4.2)

dengan

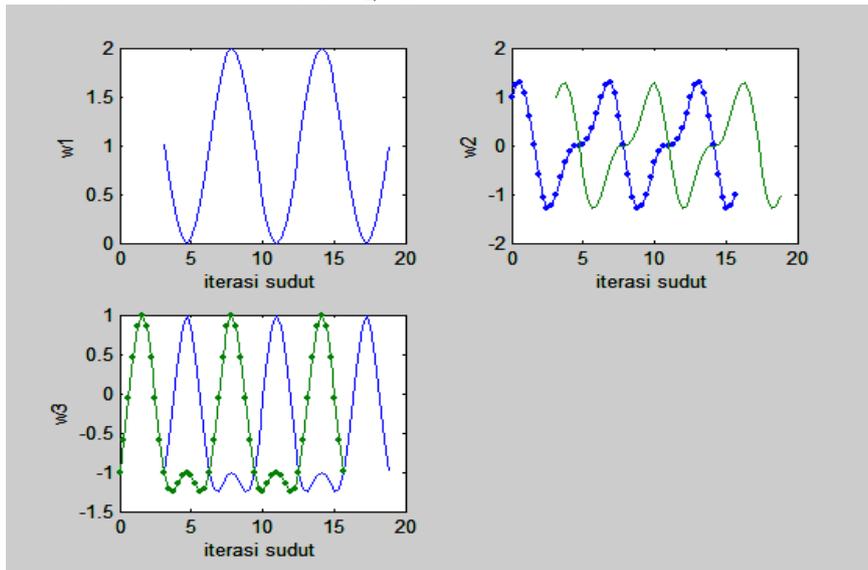
$$v_{ab}^s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$\omega_{ab}^s = \begin{bmatrix} 1 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \sin \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \\ -\sin \varphi \cos \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \cos \varphi \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \\ \cos \varphi \cos \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \end{bmatrix}.$$

Tampak terlihat bahwa kecepatan sudut spatial ( $\omega_{ab}^s$ ) sistem pada kasus ini bergantung pada besarnya sudut rotasi terhadap sumbu-x ( $\varphi$ ), sumbu-y ( $\beta$ ) dan sumbu-z ( $\alpha$ ) yang merupakan fungsi dari  $\theta$ . Koordinat *twist* dari sistem tersebut adalah

$$\xi = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \sin \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \\ -\sin \varphi \cos \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \cos \varphi \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \\ \cos \varphi \cos \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \end{bmatrix}. \quad \text{pers.(4.3)}$$

Berikut ditampilkan grafik yang menggambarkan hubungan antara masing-masing komponen kecepatan sudut spatial ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ) dan besar sudut rotasi:



Gambar 4.1 Kecepatan Sudut Spatial dengan  $\varphi \neq \beta \neq \alpha$ 

Gambar 4.1 menunjukkan bahwa dengan iterasi yang sama dan  $\varphi \neq \beta \neq \alpha$ : kecepatan sudut spatial pada sumbu-x ( $\omega_1$ ) sebagai fungsi  $\beta$  menggambarkan kurva *sinusoidal* yang memiliki rentangan kecepatan sudut =  $[0, 2]$  rad/s; kecepatan sudut spatial pada sumbu-y ( $\omega_2$ ) sebagai fungsi  $\varphi$  (*garis yang dihubungkan dengan titik*) dan fungsi  $\beta$  (*garis lurus*) menunjukkan kurva dengan pola yang sama yakni kurva yang berfluktuasi dengan rentangan kecepatan sudut =  $[-1, 1]$  rad/s; dan kecepatan sudut spatial pada sumbu-z ( $\omega_3$ ) sebagai fungsi  $\varphi$  (*garis yang dihubungkan dengan titik*) dan fungsi  $\beta$  (*garis lurus*) serta menunjukkan kurva dengan pola yang sama yakni kurva yang berfluktuasi dengan rentangan kecepatan sudut =  $[-1, 1]$  rad/s.

Sedangkan, kecepatan *body* sistem tersebut diperoleh:

$$\hat{V}_{ab}^b = g_{ab}^{-1} \dot{g}_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab}^T \dot{R}_{ab} & R_{ab}^T \dot{\rho}_{ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{V}_{ab}^b = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -\left(1 \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \sin \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) & -\sin \alpha \cos \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \cos \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \theta} & 0 \\ 1 \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \sin \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} & 0 & -\cos \alpha \cos \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \sin \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \theta} & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \cos \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \theta} & \cos \beta \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \sin \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pers.(4.4)

atau,

$$V_{ab}^b = \begin{bmatrix} v_{ab}^b \\ \omega_{ab}^b \end{bmatrix}, \quad \text{pers.(4.5)}$$

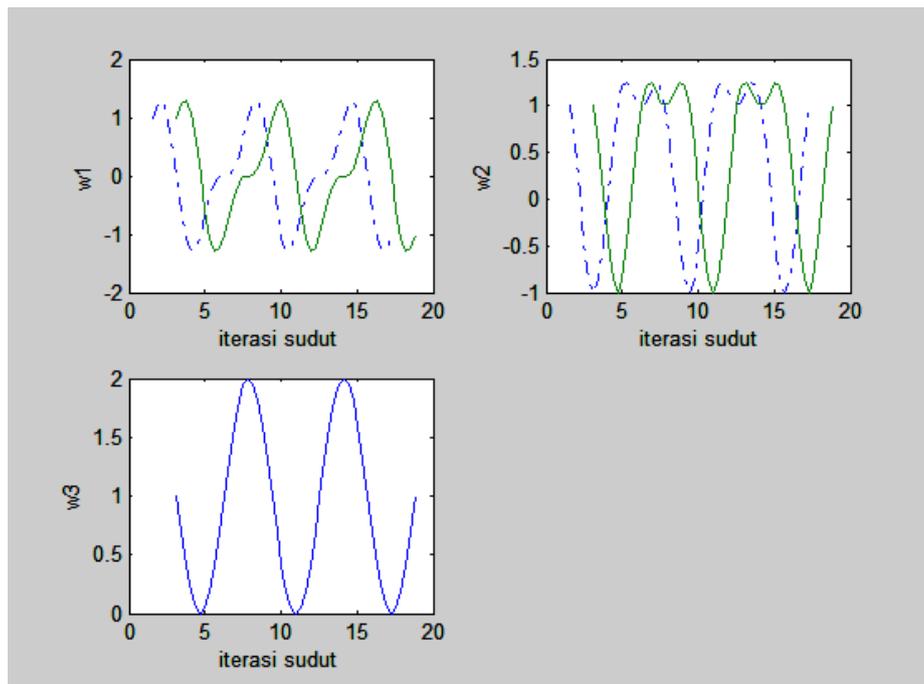
dengan

$$v_{ab}^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$\omega_{ab}^b = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \sin \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \\ -\sin \alpha \cos \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \cos \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \\ 1 \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \sin \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan persamaan (4.5) kecepatan sudut *body* ( $\omega_{ab}^b$ ) sistem pada kasus ini bergantung pada besarnya sudut rotasi terhadap sumbu-x ( $\varphi$ ), sumbu-y ( $\beta$ ) dan sumbu-z ( $\alpha$ ) yang merupakan fungsi dari  $\theta$ .

Berikut ditampilkan grafik yang menggambarkan hubungan antara masing-masing komponen kecepatan sudut spatial ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ) dan besar sudut rotasi:



Gambar 4.2 Kecepatan Sudut *Body* dengan  $\varphi \neq \beta \neq \alpha$

Berdasarkan gambar 4.2 tampak bahwa dengan iterasi yang sama dan  $\varphi \neq \beta \neq \alpha$ : kecepatan sudut *body* pada sumbu-x ( $\omega_1$ ) sebagai sebagai fungsi  $\alpha$  (*garis yang terputus-putus*) dan fungsi  $\beta$  (*garis lurus*) menunjukkan kurva dengan pola yang sama yakni kurva yang berfluktuasi dengan rentangan kecepatan sudut =  $[-1, 1]$  rad/s.; kecepatan sudut spatial pada sumbu-y ( $\omega_2$ ) sebagai fungsi  $\varphi$  (*garis yang dihubungkan dengan titik*) dan fungsi  $\beta$  (*garis lurus*) menunjukkan kurva dengan pola yang sama yakni kurva yang berfluktuasi dengan rentangan kecepatan sudut =  $[-1, 1]$  rad/s.; dan kecepatan sudut spatial pada sumbu-z ( $\omega_3$ ) sebagai fungsi  $\beta$  menggambarkan kurva *sinusoidal* yang memiliki rentangan kecepatan sudut =  $[0, 2]$  rad/s.

## SIMPULAN DAN SARAN

Gerak robot dengan model *ball joints* digambarkan oleh dua persamaan kecepatan koordinat spatial dan *body*, yakni:  $\hat{V}_{ab}^s$  dan  $\hat{V}_{ab}^b$ . Yang menggambarkan kecepatan sistem sebagai fungsi sudut rotasi terhadap sumbu-x ( $\varphi$ ), sumbu-y ( $\beta$ ) dan sumbu-z ( $\alpha$ ) yang merupakan fungsi dari  $\theta$ .

Penelitian ini merupakan kajian awal mengenai konsep gerak robot dengan model *ball joints*, yang masih sangat banyak memiliki keterbatasan. Selanjtnya, diharapkan penelitian ini dapat dikembangkan pada kajian yang lebih mendalam terkait dengan konsep gaya yang terkait dengan gerak robot, serta pengaplikasian konsep gerak robot pada berbagai jenis *joints*.

**DAFTAR PUSTAKA**

- Arhami, M. & Desiani, A. 2005. Pemrograman MATLAB. Yogyakarta: Andi.
- Arya, A. P. 1990. *Introduction to Classical Mechanics*. USA. Allyn and Bacon.
- Duindam, V. & Stramigioli, S. 2007. Lagrangian dynamics of open multibody systems with generalized holonomic and nonholonomic joints, in *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, San Diego, USA, Oct 29 – Nov 2.
- Grassia, F.S. 1998. Practical Parameterization of Rotations Using the Exponential Map. *The Journal of Graphics Tools*, volume 3(3).
- Lee, T., Leok, M., & McClamroch, N. H. 2010. Computational Geometric Optimal Control of Connected Rigid Bodies in a Perfect Fluid, in *American Control Conference*. Marriott Waterfront, USA. June 30-July 02.
- Moll, G.P. & Rosenhahn, B. *Ball Joints for Marker-less Human Motion Capture*. Germany.
- Murray, R.M., Li, Z., & Sastry, S.S. 1994. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press.
- Nakahara, M., 1998. *Geometry, Topology and Physics*. Bristol and Philadelphia. Institute of Physics Publishing.
- Nightingale, J., Hind, R., & Goodwine, B. 2008. Geometrical Analysis of a Class of Constrained Mechanical Control Systems in the Nonzero Velocity Setting, in *Proceedings of the 17th World Congress, The International Federation of Automatic Control*, Seoul, Korea, July 6-11.
- Santayasa, I Wayan. 2009. *Matriks dan Ruang Vektor*. Universitas Pendidikan Ganesha. Singaraja.
- Sutojo, T., Bowo, Erna, Astuti, S., Yuniarsih R., & Mulyanto, E. 2010. Teori dan Aplikasi Aljabar Linier dan Matriks dengan Implementasi Aljabar Linier dan Matriks Menggunakan Matlab. Yogyakarta: Andi.